MÉTROPOLE (R) 2013

La quête du grave

L'histoire de la contrebasse remonte à la création de la famille des violons au XVI^{ème} siècle en Italie. La recherche d'instruments à cordes avec ce timbre particulier mais capable de jouer des notes plus graves a conduit à l'élaboration de la contrebasse puis de l'octobasse. En 2010 l'atelier de lutherie de Mirecourt de J.J. Pagès a reproduit à l'identique l'octobasse.

L'objectif de cet exercice est de répondre au problème que se pose le luthier :

Comment peut-il produire des notes de plus en plus graves avec l'instrument qu'il fabrique, l'octobasse ?

Pour répondre aux questions suivantes, vous vous aiderez des documents 1 à 3 en fin d'exercice.

Résolution de problème

Questions préalables

• Donner la relation liant la fréquence f du mode de vibration fondamental, la longueur de la corde L et la célérité v de l'onde sur la corde. Montrer que cette relation peut s'écrire : $f = \dfrac{1}{2 \cdot L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

• Le son le plus grave de la contrebasse jouant à vide est un mi$_0$. La longueur de la corde émettant cette note vaut L_0 = 1,05 m. On souhaite construire une octobasse qui puisse émettre la note do$_{-1}$. En faisant l'hypothèse que l'octobasse possède une corde de même masse linéique et de même tension que la corde « mi$_0$ » de la contrebasse, que peut-on dire de la longueur de la corde L$_{-1}$ de l'octobasse nécessaire pour émettre la note do$_{-1}$. À quelle difficulté se trouve confronté le luthier ?

Problème

En s'affranchissant de l'hypothèse précédente, quelle(s) solution(s) technique(s) le luthier peut-il proposer pour que, en respectant le cahier des charges (document 3), une même corde de l'octobasse puisse émettre un do$_{-1}$ et aussi un ré$_{-1}$?

L'analyse des données ainsi que la démarche suivie sont évaluées et nécessitent d'être correctement présentées. Les calculs numériques seront menés à leur terme avec rigueur.

Document 1 : Quelques informations

Une corde de longueur L vibrant dans son mode fondamental vérifie la relation : $L = \lambda/2$, avec λ : longueur d'onde de la vibration de la corde.

La célérité v de l'onde sur la corde est liée à la tension T imposée à la corde et à sa masse linéique μ par la relation : $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, avec T en N et μ en kg·m^{-1}

Le domaine du spectre audible pour l'Homme va de 20 Hz à 20 kHz.

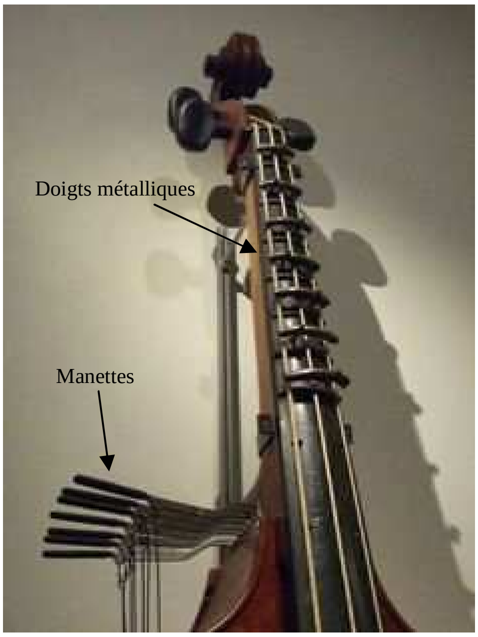
Document 2 : Fréquences de quelques notes dans la gamme tempérée, en Hz

Numéro d'octave	-1	0	1
do (ut)	16,3	32,7	65,4
ré	18,3	36,7	73,4
mi	20,6	41,2	82,4
fa	21,8	43,6	87,3
sol	24,5	49,0	98,0
la	27,5	55,0	110
si	30,9	61,7	123

Les cordes d'un instrument sont nommées d'après la note qu'elles émettent dans le mode fondamental, quand elles sont pincées à vide.

Document 3 : Cahier des charges de l'octobasse d'après le luthier

L'octobasse possède 3 cordes jouant respectivement les notes do$_{-1}$, sol$_{-1}$ et do$_0$ et sa taille est d'environ 4 m. La longueur des cordes est de 2,18 m (longueur à vide). L'instrument est si grand que le musicien doit monter sur un escabeau pour frotter les cordes avec un archer. Le musicien peut manipuler, à l'aide de manettes, sept doigts métalliques qui réduisent la longueur des cordes pour jouer les différentes notes.



Correction

Questions préalables

• D'après le cours (tronc commun, chapitre P2), on sait que $f = v / \lambda$
D'après le document 1, on sait que $\lambda = 2 \cdot L$, donc $f = v / (2 \cdot L)$.

D'après le document 1 toujours, on sait que $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, donc

$$f = \frac{1}{2 \cdot L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

• Fréquence du mi_0 : 41,2 Hz. On souhaite obtenir une fréquence de 16,3 Hz (2,53 fois plus petite) en ne changeant que la longueur de la corde. Il faut donc une corde 2,53 fois plus grande, soit une corde de 2,65 m. Le luthier ne pourra donc pas respecter le cahier de charge, qui dit que la corde doit mesurer 2,18 m.

Problème

• On suppose que, pour des raisons pratiques, la tension des cordes de l'octobasse est la même que celle des cordes de la contrebasse.

• Pour pouvoir émettre une note do_{-1} avec une corde à vide, le luthier va donc devoir utiliser une corde dont la masse linéique μ_O est supérieure à celle μ_C de la corde mi_0 de la contrebasse. Calculons le rapport μ_O / μ_C.

- Pour la corde mi_0 de la contrebasse, on a : $41{,}2 = \dfrac{1}{2 \times 1{,}05}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_C}}$

- Pour la corde do_{-1} de l'octobasse, on a : $16{,}3 = \dfrac{1}{2 \times 2{,}18}\sqrt{\dfrac{T}{\mu_O}}$

En faisant le rapport de ces deux relations, on obtient :

$$\frac{41{,}2}{16{,}3} = \frac{2{,}18}{1{,}05}\sqrt{\frac{T}{\mu_C}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_O}{T}} \text{ soit } \frac{\mu_O}{\mu_C} = \left(\frac{41{,}2 \times 1{,}05}{16{,}3 \times 2{,}18}\right)^2 = 1{,}48$$

Il doit donc choisir une corde dont la masse linéique est environ 1,5 fois plus grande que celle de la corde mi_0 de la contrebasse.

• Pour pouvoir jouer un ré_{-1}, il faut raccourcir la corde, et donc la bloquer à une certaine longueur. La fréquence de la note est multipliée par 18,3/16,3 = 1,12. Sa longueur doit donc être de 2,18/1,12 = 1,94 m.
Pour pouvoir jouer un ré, un doigt métallique doit se trouver à 2,18-1,94 = 24 cm de l'extrémité de la corde.