

MÉTROPOLE 2013 - EX 2

Principe de fonctionnement d'un GPS (10 pts)

Le nom officiel du GPS (Global Positioning System) est originellement NAVSTAR (Navigation System by Timing and Ranging). Il fut imaginé et mis au point par le département de la défense américaine qui envoya dans l'espace la première génération de satellites à partir de 1978. Depuis lors, celui-ci a largement fait ses preuves et le système GPS actuel comporte une trentaine de satellites en orbites quasi circulaires faisant inlassablement deux révolutions par jour autour de la Terre.

Données :

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Altitude moyenne des satellites GPS : $h = 2,00 \cdot 10^4 \text{ km}$
- Masse de la Terre : $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- 1 octet = 8 bit

Document : Fonctionnement général du GPS

Principe de la localisation

On peut déterminer la position d'un point à partir de sa distance à d'autres points. Par exemple, supposons que nous soyons perdus quelque part en France, si nous passons devant un panneau indiquant que Paris est à 150 km sans en donner la direction, nous sommes situés quelque part sur un cercle centré sur Paris et de rayon 150 km. Si par ailleurs un autre panneau nous indique Orléans 230 km, nous sommes sur un cercle centré sur Orléans et de rayon 230 km. Il suffit donc de tracer ces deux cercles et de voir où ils se coupent. Généralement, ils se coupent en deux points (Dieppe et Sainte-Menehould dans notre exemple) et nous avons donc besoin d'une troisième indication afin d'éliminer l'un des deux points.

Mesure de la distance satellite/récepteur

Un satellite GPS envoie très régulièrement un signal électromagnétique indiquant l'heure de l'émission du signal de manière très précise, ainsi que des informations sur la position du satellite. Le récepteur n'a plus qu'à comparer l'heure de réception à celle de l'émission pour calculer le temps de parcours du signal et en déduire la distance le séparant du satellite.

Pour bénéficier d'une précision de 10 m dans la direction de propagation du signal électromagnétique envoyé par un satellite GPS, le récepteur GPS doit mesurer la durée de trajet de ce signal avec une précision d'environ 30 ns. Cette précision extrême nécessite de prendre en compte des effets relativistes. La non prise en compte de ces effets entraînerait une avance des horloges des satellites sur les horloges terrestres d'environ 38 μs par jour.

Caractéristiques du signal GPS

Les informations sont envoyées par le satellite sous la forme d'un signal binaire avec un débit très faible : $50 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans la pratique, le GPS garde en mémoire les paramètres du calcul de position reçus avant son dernier arrêt et reprend par défaut ces paramètres, lors de sa mise en marche. Ainsi, la mise à jour est d'autant plus rapide qu'on utilise son GPS fréquemment.

En réalité, le récepteur GPS reçoit en permanence des informations de plusieurs satellites, sur une même fréquence. Pour distinguer les satellites les uns des autres, on a attribué à chacun un code, appelé code C/A qui se présente sous la forme de séquences binaires répétées de 1 et de 0. Le message GPS est superposé à ce code et, lors de la réception du message, le récepteur pourra, grâce au code, identifier le satellite source et traduire le signal pour en connaître le message.

La superposition du code C/A et du message consiste simplement à inverser les 0 et les 1 du code lorsque le bit du message vaut 1 et à ne pas les modifier lorsque le bit du message vaut 0. Un exemple de signal reçu par le GPS est présenté en annexe 2.

d'après science.gouv.fr



Allure des orbites des satellites GPS

1. À propos de la localisation

Sortant tout juste d'une ville française, un automobiliste voit un panneau indiquant Lyon à 240 km et Nancy à 340 km. Déterminer graphiquement, à l'aide de la carte fournie en annexe 1, à rendre avec la copie, la ville où il se trouve. Justifier.

2. Étude du mouvement d'un satellite

Le mouvement du satellite est étudié dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Ce référentiel est associé au centre de la Terre ainsi qu'à trois étoiles lointaines, considérées comme fixes.

2.1. En supposant que son orbite est circulaire, montrer que le mouvement d'un satellite GPS de masse m est uniforme.

2.2. Montrer que l'expression de la vitesse du satellite est $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$

et déterminer sa valeur numérique.

2.3. Établir l'expression de la période de révolution d'un satellite GPS. Calculer sa valeur et vérifier qu'elle est compatible avec l'information du texte d'introduction.

3. Précision des mesures

3.1. Justifier par le calcul la phrase suivante : « Pour bénéficier d'une précision de 10 m dans la direction de propagation du signal électromagnétique envoyé par un satellite GPS, le récepteur GPS doit mesurer la durée de trajet de ce signal avec une précision d'environ 30 ns. »

3.2. Quelle est la durée de parcours du signal électromagnétique ? En déduire la précision relative sur la mesure de cette durée.

3.3. Si on ne tenait pas compte des effets relativistes, quel serait le décalage temporel entre les horloges terrestres et celles du satellite GPS au bout d'une journée ? En déduire la durée nécessaire pour que les horloges terrestres et celle du satellite GPS soient significativement désynchronisées, c'est-à-dire pour qu'elles soient décalées de 30 ns.

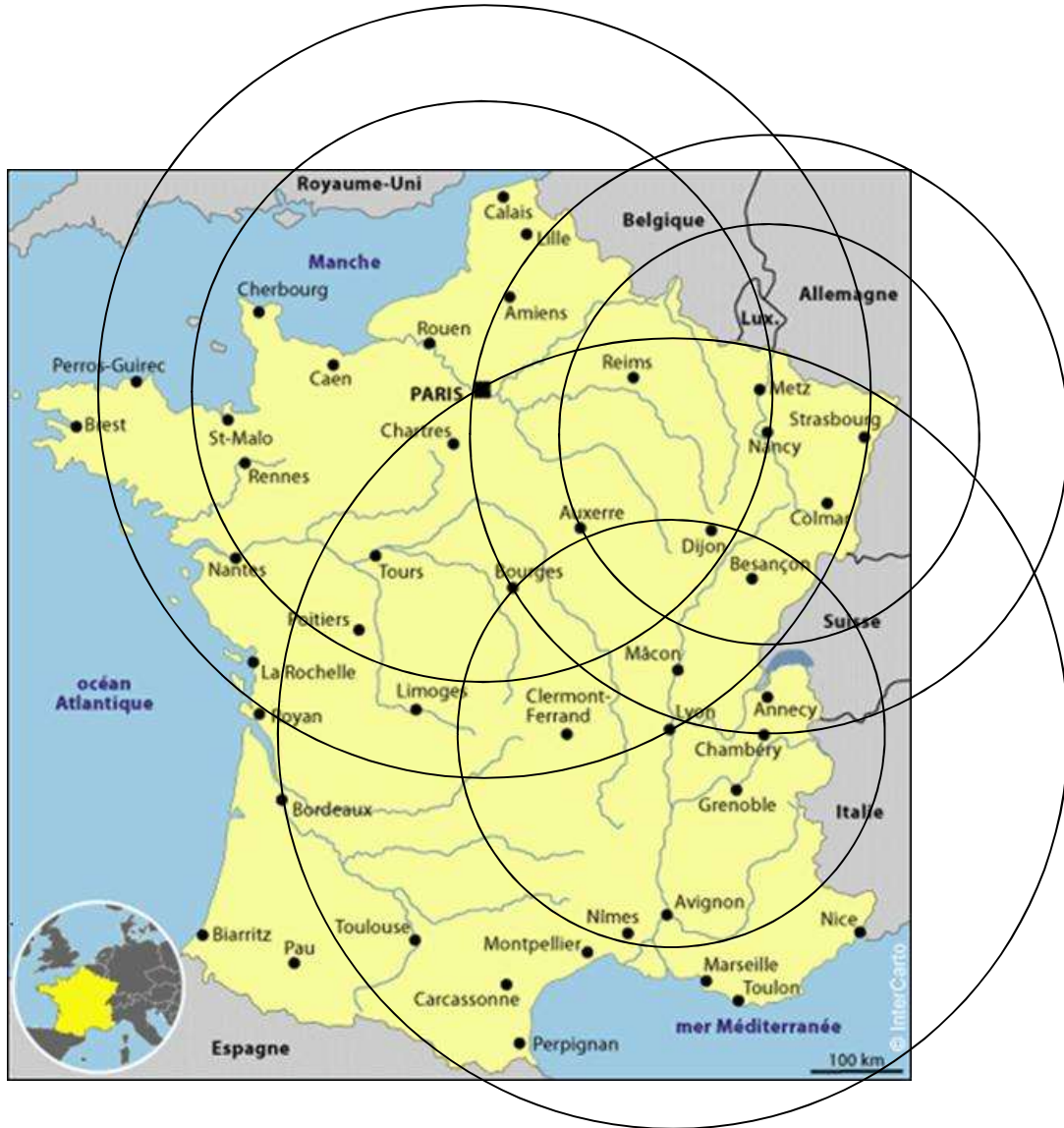
4. Étude du signal GPS

4.1. Sachant que le message GPS contenant les paramètres de calcul a une taille d'environ 4,5 ko, calculer la durée nécessaire à l'envoi de l'intégralité de ce message par le satellite lors de la mise en marche du GPS. Commenter cette durée surprenante en s'appuyant sur le document « Fonctionnement général du GPS ».

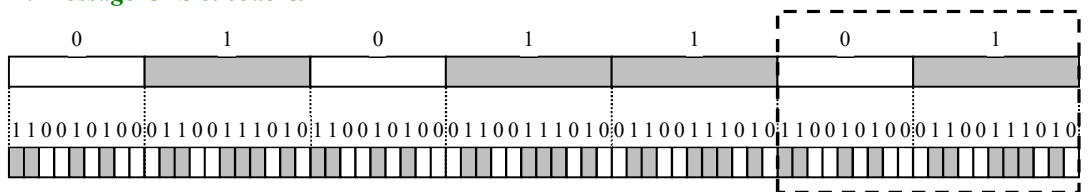
4.2. En annexe 2, à rendre avec la copie, est donné un exemple de message GPS et de code C/A. Compléter cette annexe par 0 ou 1 en effectuant la superposition « message + code » comme cela est indiqué dans le document « Fonctionnement général du GPS ».

Annexe

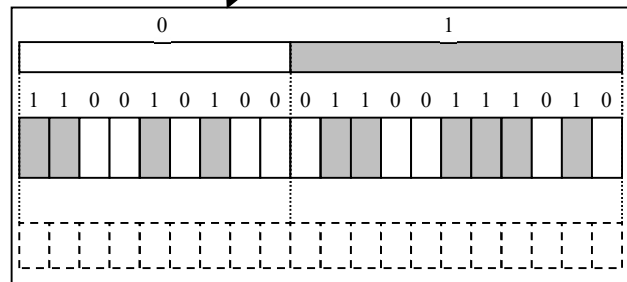
Annexe 1 : Carte de France



Annexe 2 : Message GPS et code C/A

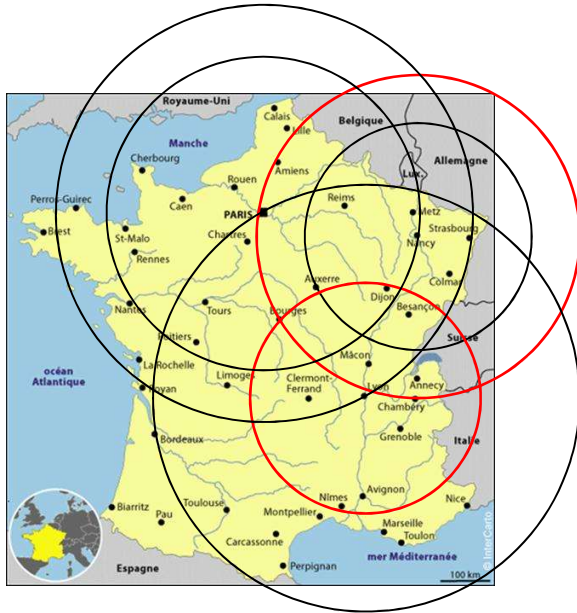


Le cadre ci-contre est un agrandissement



Correction

1. Panneau indiquant Lyon à 240 km : cela signifie qu'il se trouve sur un cercle centré sur Lyon et d'un rayon de 240 km. En utilisant l'échelle sur la carte, on voit que cela correspond au plus petit cercle centré sur Lyon. Par un même raisonnement, on trouve que l'automobiliste se trouve sur le cercle le plus grand centré sur Nancy. Il se trouve donc à l'intersection de ces deux cercles, or, il n'y en a qu'une en France (l'autre se trouve en Italie) qui correspond à la ville de Bourges.



2.1. Le satellite n'est soumis qu'à une seule force : l'attraction de la Terre. Si son orbite est circulaire, alors à tout moment, cette force, et donc le vecteur accélération \vec{a} du satellite est perpendiculaire à la trajectoire et donc à son vecteur vitesse \vec{v} . Donc \vec{a} n'a aucune composante selon le vecteur unitaire tangentiel \vec{u}_t du repère de Frenet associé au satellite. Or, on sait que dans un tel repère, l'expression générale de l'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

Cela signifie que, dans le cas d'un mouvement circulaire, $\frac{dv}{dt} = 0$.

2.2. D'une part, on a (RFD) : $m \cdot a = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$. D'autre part, pour un

mouvement circulaire uniforme dans un repère de Frenet, on a $a = \frac{v^2}{r}$

avec $r = R_T + h$. On obtient donc : $\frac{v^2}{R_T + h} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2}$ et donc

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = 3,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.3. La période T est le temps mis par le satellite se déplaçant à la vitesse v pour effectuer une révolution de circonférence $2\pi \cdot (R_T + h)$, d'où :

$$T = \frac{2\pi \cdot (R_T + h)}{v} = \frac{2\pi \cdot (R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{G \cdot M_T}} = 4,26 \cdot 10^4 \text{ s, soit environ 12 h}$$

Cette valeur est compatible avec les « deux révolutions par jour » indiquées dans le texte.

3.1. Durant 30 ns, une onde électromagnétique parcourt une distance de $d = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \times 30 \cdot 10^{-9} = 9 \text{ m}$. Donc une incertitude de 30 ns correspond à une incertitude sur la distance parcourue par le signal de 9 m.

3.2. Le signal a parcouru 20.000 km environ (altitude du satellite) soit une durée de $\Delta t = d / c = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ s}$. Ce qui fait une précision relative de $30 \cdot 10^{-9} / 6,7 \cdot 10^{-2} \times 100 = 4,5 \cdot 10^{-5} \% !!!$

3.3. Ce décalage serait de 38 μs (donné dans le texte). Un décalage de 30 ns arriverait au bout de (tableau de proportionnalité) 1 minute environ.

$$1440 \text{ minutes (24 h)} \rightarrow 38 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$? \rightarrow 30 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

4.1. 4,5 ko = 36 000 bit

À 50 bit/s, cela donne un temps de téléchargement de 720 secondes soit 12 minutes.

Ce temps paraît très long, mais comme l'indique le document « le GPS garde en mémoire les paramètres du calcul de position reçus avant son dernier arrêt et reprend par défaut ces paramètres, lors de sa mise en marche. Ainsi, la mise à jour est d'autant plus rapide qu'on utilise son GPS fréquemment ». Cela explique pourquoi le GPS met beaucoup moins que 12 minutes trouver sa localisation.

4.2. Superposition « message + code »

