EXERCICES P2 : MÉCANIQUE CLASSIQUE

1 Dérivées

1. $f(x) = 2x^2 - 3$, calculer $\dfrac{df}{dx}$ puis $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

2. $f(t) = -5 \cdot t^2 + 3 \cdot t - 8$, calculer $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$

3. $x(t) = 8 \cdot t^3 - 4 \cdot t + 5$, calculer $\dfrac{dx}{dt}$ puis $\dfrac{d^2 x}{dt^2}$

2 Primitives

1. Quelle est l'expression générale de la primitive d'une fonction constante $f(t) = a$?

2. Quelle est l'expression générale de la primitive d'une fonction affine $g(t) = a \cdot t + b$?

3. Soit $v(t)$ la primitive d'une fonction a constante. Soit $x(t)$ la primitive de la fonction $v(t)$. Donner l'expression de $x(t)$ sachant que $v(0) = 0$ et $x(0) = 5$.

3 Vecteurs

Soit le vecteur $\vec{v}$ (t) de coordonnées :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = -2t^2 + 8t - 3 \\ v_y = -5t + 2 \\ v_z = 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la valeur des coordonnées ainsi que la norme des vecteurs $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ et $\dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2}$, pour $t = 4{,}5$ s.

2. Soit le vecteur $\vec{a}$ de coordonnées (0 ; 0 ; -9,8)

Trouver les coordonnés du vecteur $\vec{v}$ (t) primitive du vecteur $\vec{a}$ sachant que $\vec{v}\,(0) = \vec{0}$, et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}\,(t)$, primitive du vecteur $\vec{v}$ tel que $\overrightarrow{OM}\,(0) = (0 ; 0 ; 10)$. Pour quelle valeur de t a-t-on $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$?

4 Mouvement rectiligne uniforme

Une voiture se déplace à vitesse constante et en ligne droite, à la vitesse de 30 $m \cdot s^{-1}$. Son passage en un point O constitue l'origine des dates (autrement dit, on considère que $t = 0$ lorsque la voiture passe par le point O). On souhaite étudier son mouvement dans le référentiel terrestre.

1. Choisissez un repère d'étude permettant le traitement mathématique le plus simple de son mouvement.

2.a. Donner les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position de la voiture (que l'on assimilera à un point M).

2.b Même question si on inverse l'orientation de tous les axes du repère.

5 Mouvement circulaire uniforme

Un satellite d'observation de la Terre se trouve à 785 km d'altitude et effectue le tour complet de la planète en 100 minutes. Son mouvement est circulaire uniforme.

Donner les coordonnées de son vecteur accélération et de son vecteur vitesse dans le repère de Frenet.

6 Décollage du Rafale

Le *Rafale* est un avion de chasse français. Sa masse, armé et avec le plein de carburant, est de 23,7 t. Il dispose de deux turboréacteurs d'une poussée unitaire de 50 kN. Sa vitesse de décollage est de 213 $km \cdot h^{-1}$.

Le porte-avion *Charles de Gaulle* comporte une piste de 195 m.

Problème : Le *Rafale* est-il capable de décoller du *Charles de Gaulle* sans catapulte ?

Remarque : une catapulte sert à communiquer à l'avion un complément d'accélération en plus de celle fournie par ses turboréacteurs.

7 Balle lancée vers le haut

Une balle est lancée vers le haut, dans une direction parfaitement verticale, à partir d'une hauteur de 2,0 m et avec une vitesse initiale de 3,0 $m \cdot s^{-1}$. Les forces de frottement pourront être négligées. On prendra $g = 10$ $m \cdot s^{-2}$.

Au bout de combien de temps retombe-t-elle au sol à partir du moment où la balle est lâchée ?

Quelle est la hauteur maximale atteinte au cours de sa trajectoire ?

Quelle vitesse a la balle au moment de son impact avec le sol ?

Mêmes questions sur la lune ($g_{lune} = 1{,}6$ $m \cdot s^{-2}$).

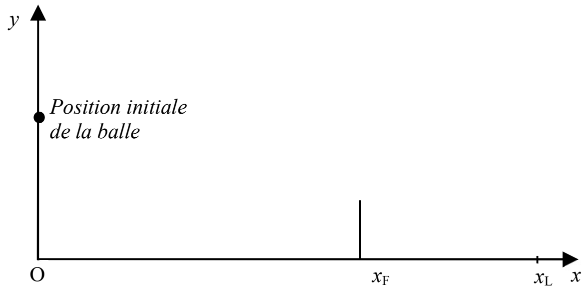
8 Principe des actions réciproques

Expliquez en quoi la troisième loi de Newton rend les voyages dans le vide bien plus difficiles que dans une atmosphère.

9 Le rugby, sport d'évitement

Annales « Liban 2013 » - Ex.2, partie 2

10 Service au tennis



Un joueur de tennis fait un service en communicant une vitesse initiale à la balle de v_0 parallèlement au sol. La balle est frappée à 2,30 m du sol. Elle doit passer au dessus du filet, d'une hauteur de 91 cm, situé à x_F 12,0 m du joueur et doit toucher le sol avant la ligne de service, située à x_L = 18,4 m. On négligera les frottements.

Problème : Donner un encadrement de la valeur de la vitesse initiale v_0, en km/h, qu'il doit communiquer à la balle pour réussir son service.

11 Rapport e/m de l'électron

D'après annales « Antilles 2013 » - Ex.3

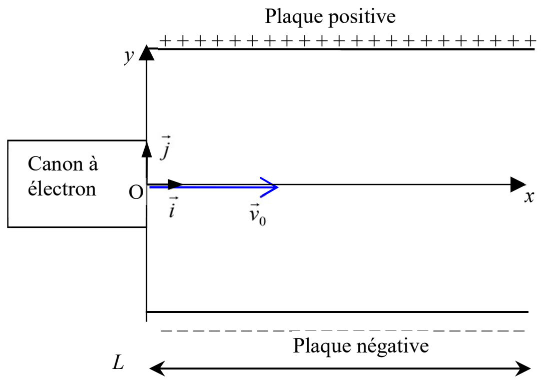
Le physicien anglais Joseph John Thomson utilisa un tube à vide, dans lequel une cathode émet un faisceau très étroit d'électrons. Ce faisceau passe ensuite entre deux plaques métalliques de charges opposées. Les électrons, soumis à ce champ électrostatique, sont alors déviés de leur trajectoire et viennent frapper un écran constitué d'une couche de peinture phosphorescente.

Document 1 : Création d'un champ électrostatique

Deux plaques métalliques horizontales portant des charges opposées possèdent entre elles un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ caractérisé par :
- sa direction : perpendiculaire aux plaques
- son sens : de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement.

Document 2 : Expérience de Thomson pour déterminer le rapport e/m pour l'électron

Le montage ci-dessous reprend le principe de l'expérience de Thomson. Il comporte un tube à vide dans lequel un faisceau d'électrons est dévié entre deux plaques de charges opposées. On mesure la déviation verticale du faisceau d'électrons lors de la traversée des plaques sur une longueur L, afin de déterminer la valeur du rapport e/m.



Données de l'expérience :
Les électrons sortent du canon avec une vitesse $v_0 = 2{,}27 \cdot 10^7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Le faisceau d'électrons passe entre les deux plaques chargées et est dévié d'une hauteur h quand il sort des plaques.
L'intensité du champ électrostatique entre les deux plaques est : $E = 15{,}0\ \text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$.
La longueur des plaques est : $L = 8{,}50$ cm.
On fait l'hypothèse que le poids des électrons est négligeable par rapport à la force électrostatique.

1. Détermination du signe de la charge de l'électron

1.1. Représenter, sur la figure du document 2 le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$. On prendra comme échelle 1,0 cm pour 10 $\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$

1.2. J.J. Thomson a observé une déviation du faisceau d'électrons vers la plaque métallique chargée positivement. Expliquer comment J.J. Thomson en a déduit que les électrons sont chargés négativement.

1.3. Donner la relation entre la force électrostatique $\vec{F}$ subie par un électron, la charge élémentaire e et le champ électrostatique $\vec{E}$. Montrer que le sens de déviation du faisceau d'électrons est cohérent avec le sens de $\vec{F}$.

2. Détermination du rapport e/m pour l'électron

2.1. En appliquant la deuxième loi de Newton à l'électron, montrer que les relations donnant les coordonnées de son vecteur accélération sont :

$$a_x = 0 \text{ et } a_y = \frac{eE}{m}$$

2.2. Montrer que la courbe décrite par les électrons entre les plaques a pour équation :

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

À la sortie des plaques, en $x = L$, la déviation verticale du faisceau d'électrons par rapport à l'axe (Ox) a une valeur $h = 1{,}85$ cm.

2.3.1. En déduire l'expression du rapport e/m en fonction de E, L, h et v_0.

2.3.2. Donner la valeur du rapport e/m.

12 Le rugby, sport de contact

Annales « Liban 2013 » - Ex.2, partie 1

13 Ravitaillement de la station ISS

Annales « Amérique du Nord 2013 » - Ex.2, partie 2

14 Mouvement du satellite Planck

Annales « zéro n°1 » - Ex.1, partie 2

15 Mouvement de la station ISS

Annales « Amérique du Nord 2013 » - Ex.2 partie 1

16 Étude du mouvement du satellite Ibuki

Annales « Nouvelle-Calédonie 2013 » - Ex.2, partie 3

17 Étude de l'orbite de Hubble

Annales « Antilles (r) 2013 » - Ex.3, partie 1

18 Satellite géostationnaire

Annales « Métropole (r) 2013 » - Ex.1, partie 1

19 Énergie cinétique

À quelle vitesse devrait se déplacer un être humain pour avoir une énergie cinétique comparable à celle d'une balle de fusil (vitesse 1 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$, masse 5 g) ?

20 Énergie potentielle de pesanteur

Montrer que la variation d'énergie potentielle de pesanteur ne dépend pas de l'origine des altitudes choisie.

21 Énergie potentielle électrique

1.a. Quelle est la variation d'énergie potentielle d'un électron passant de la borne – à la borne + d'un générateur ayant une différence de potentiel de 6 V entre ses bornes ?

1.b. Que devient cette énergie perdue par l'électron ?

2. Quelle est la variation d'énergie potentielle d'un proton se déplaçant parallèlement à un champ électrique d'intensité 1000 $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, sur une distance de 50 cm, vers les potentiels négatifs ?

22 Travail d'une force constante

Une autre manière de résoudre l'exercice n°8.

Le *Rafale* a une masse de 23,7 t. Il dispose de deux turbos réacteurs d'une poussée unitaire de 50 kN. Sa vitesse de décollage est de 213 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le porte-avion *Charles de Gaulle* comporte une piste horizontale de 195 m. On négligera les frottements tout au long de cet exercice.

1.a. Calculer le travail de la force de poussée des réacteurs sur la longueur de la piste. Comment peut-on qualifier ce travail ?

1.b. Y a-t-il d'autres forces qui travaillent lors de ce déplacement ?

2.a. En quelle forme d'énergie se transforme le travail de cette force ?

2.b. L'énergie mécanique de l'avion est-elle constante lors de ce déplacement ?

3. Montrer, sans utiliser la RFD, que l'avion ne peut décoller sur une distance aussi courte.

23 Travail du poids et ΔE_{PP}

Démontrer que W($\vec{P}$) = $-\Delta E_{PP}$

24 Frottements s'exerçant sur une voiture

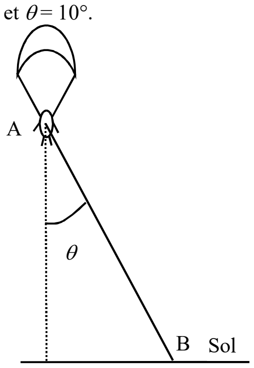
Une voiture moyenne consomme 8 L d'essence au 100 km, sur un trajet horizontal. En considérant un rendement moteur de 20 % et une densité énergétique de l'essence de 35 $\text{MJ}\cdot\text{L}^{-1}$, estimer la valeur des forces de frottements moyennes s'exerçant sur la voiture.

Vous préciserez les approximations et/ou hypothèses que vous faites pour résoudre ce problème.

25 Saut en parachute

Un parachutiste de masse $m = 80$ kg suit une trajectoire rectiligne du point A au point B comme montré sur la figure ci-dessous.
Durant cette chute, sa vitesse est constante et vaut $v = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Données : AB = 100 m et $\theta = 10°$.



1. Exprimer le travail du poids en fonction de θ, m, g et AB.

2. Démontrer que ce travail peut s'écrire $W_{AB}(\vec{P}) = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$.

3. Calculer la valeur du travail du poids sur ce parcours.

4. Calculer la variation d'énergie mécanique du parachutiste entre le point A et le point B juste avant qu'il ne touche le sol (altitude négligeable mais $v = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

5. Pourquoi cette énergie mécanique n'est-elle pas constante ? En déduire la valeur du travail des forces de frottements.

26 Hauteur atteinte par une balle lancée

Une balle est lancée vers le haut, dans une direction parfaitement verticale, à partir d'une hauteur de 2,0 m et avec une vitesse initiale de 3,0 $m \cdot s^{-1}$. Les forces de frottement seront négligées.

Sans utiliser la RFD, déterminer quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle, et quelle et sa vitesse au moment où elle touche le sol.

27 Mise en orbite du téléscope James Webb

Annales « Antilles (r) 2013 » - Ex.3, partie 2

28 Ascenseur spatial

Annales « Métropole (r) 2013 » - Ex.1, partie 2

Correction

Ex.1

1. $\dfrac{df}{dx} = 4x$ et $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = 4$

2. $\dfrac{d^2 f}{dt^2} = -10$

3. $\dfrac{dx}{dt} = 24 \cdot t^2 - 4$ et $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = 48 \cdot t$

Ex.2

1. Expression générale de la primitive de $f(t) = a$: $a \cdot t + k$ avec $k \in \Re$

2. Expression générale de la primitive de $a \cdot t + b$: $½ \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t + k'$ avec $k' \in \Re$

3. $v(t) = a \cdot t + k$ et $x(t) = ½ \cdot a \cdot t^2 + k \cdot t + k'$ (jusque là, c'est la même chose que pour les deux questions précédentes).
Si on nous indique que $v(0) = 0$, alors on a l'équation $a \cdot 0 + k = 0$ et donc $k = 0$.
De plus, si $x(0) = 5$, alors $½ \cdot a \cdot 0^2 + k' = 5$ c'est-à-dire $k' = 5$
Conclusion : $v(t) = a \cdot t$ et $x(t) = ½ \cdot a \cdot t^2 + 5$

Ex.3

1. Coordonnées de $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$: $\begin{pmatrix} -4t+8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour $t = 4,5$: $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -18 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Coordonnées de $\dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2}$: $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour $t = 4,5$: $\dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et pour $t = 4,5$ s, on a $\vec{w} = \begin{pmatrix} -27 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -9,8 \cdot t + k_3 \end{pmatrix}$ et si $\vec{v}\,(0) = \vec{0}$ alors $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} k_4 \\ k_5 \\ \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 + k_6 \end{pmatrix}$ et comme $\overrightarrow{OM}\,(0) = (0 ; 0 ; 10)$, alors $k_4 = k_5 = 0$ et $k_6 = 10$.

Ex.4

1. Le plus simple est de choisir un repère dont l'un des axes horizontaux est parallèle à la trajectoire de la voiture, dans le sens de son déplacement.

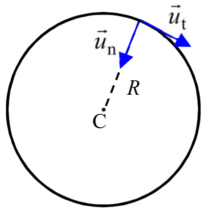
2.a. Cinématique de la voiture. Toutes les valeurs sont en unités S.I

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = 30 \cdot t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) = 30 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{pmatrix} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

2.b. Si on inverse les axes du repère, la seule chose qui va changer est le signe de la coordonnée $x(t)$:

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = -30 \cdot t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) = -30 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

Ex.5



• **Accélération :** d'après le cours, le vecteur accélération peut s'écrire $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\mathrm{t}+\frac{v^2}{R}\vec{u}_\mathrm{n}$ dans un repère de Frenet. Comme le mouvement est uniforme, la **valeur *v*** de la vitesse ne change pas, donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$. On a donc $\vec{a}=\frac{v^2}{R}\vec{u}_\mathrm{n}$. Le vecteur accélération ne possède qu'une composant normale à la trajectoire.

• **Vitesse :** Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire. Donc il ne possède qu'une composante selon $\vec{u}_t$: $\vec{v}=v\cdot\vec{u}_t$

• **Valeur de la vitesse :** Le satellite parcourt le diamètre d'un cercle de rayon R_T + 785 km pendant une durée de 100 minutes.

$$v=\frac{2\pi\cdot(6380+785)}{100\times 60}=7{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$$

• **Valeur de a_n :** $a_\mathrm{n}=v^2/R=(7{,}5\cdot10^3)^2/7165\cdot10^3=7{,}85\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Ex.7

Répondre à la problématique de l'exercice revient à répondre à la question : le *Rafale* atteint-il la vitesse de 213 km·h^{-1} après un parcours de 195 m en accélérant au maximum ?

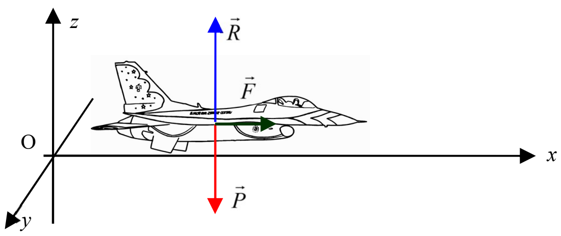
Préalables

Système étudié : l'avion, assimilé à un point M.

Choix du référentiel : le référentiel lié au porte-avion

Choix du repère : l'axe O*x* est horizontal, parallèle à la piste et dans le sens du mouvement de l'avion. L'axe O*z* est vertical vers le haut et l'axe O*y* est horizontal et perdpendiculaire à l'axe O*x*. Le point O coïncide avec la position initiale de l'avion.

Bilan des forces : l'avion est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction de la piste $\vec{R}$ et à la poussée de ses réacteurs $\vec{F}$. Nous devons négliger les frottements.



Les coordonnées des vecteurs forces sont :

$$\vec{P}\begin{pmatrix}P_x=0\\P_y=0\\P_z=-P\end{pmatrix}\quad\vec{R}\begin{pmatrix}R_x=0\\R_y=0\\R_z=R\end{pmatrix}\quad\vec{F}\begin{pmatrix}F_x=F\\F_y=0\\F_z=0\end{pmatrix}$$

Obtenir les équations du mouvement

Application de la RFD : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

Cette relation vectorielle nous donne trois relations scalaires, une sur chaque axe du repère.

O*x* : $P_x+R_x+F_x=m\cdot a_x$
O*y* : $P_y+R_y+F_y=m\cdot a_y$
O*z* : $P_z+R_z+F_z=m\cdot a_z$

On remplace les différentes coordonnées par leur valeur.

O*x* : $0+0+F=m\cdot a_x$
O*y* : $0+0+0=m\cdot a_y$
O*z* : $-P+R+0=m\cdot a_z$

L'avion n'a aucun mouvement sur l'axe O*z* (du moins tant qu'il ne décolle pas), donc a_z = 0. De plus, a_y = 0. On obtient donc les coordonnées du vecteur accélération :

$$\vec{a}\begin{pmatrix}a_x=\frac{F}{m}\\a_y=0\\a_z=0\end{pmatrix}$$

Coordonnées du vecteur vitesse : On intégre le vecteur accélération par rapport au temps. il apparaît des **constantes d'intégration**. Initialement, la vitesse de l'avion est nulle. Donc $\vec{v}(0)=\vec{0}$. Cette condition initial nous permet d'en déduire que les constantes d'intégration sont toutes nulles.

$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix}v_x=\frac{F}{m}\cdot t+v_{0x}\\v_y=v_{0y}\\v_z=v_{0z}\end{pmatrix}\rightarrow\vec{v}(t)\begin{pmatrix}v_x=\frac{F}{m}\cdot t\\v_y=0\\v_z=0\end{pmatrix}$$

Coordonnés du vecteur position : on intègre le vecteur vitesse par rapport au temps. Il apparaît encore des constantes d'intégration. Initialement, l'avion est à l'origine du repère et donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)=\vec{0}$, donc une fois encore toutes les constantes d'intégration sont nulles.

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\begin{pmatrix}x(t)=\frac{1}{2}\frac{F}{m}\cdot t^2+x_0\\y(t)=y_0\\z(t)=z_0\end{pmatrix}\rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\begin{pmatrix}x(t)=\frac{1}{2}\frac{F}{m}\cdot t^2\\y(t)=0\\z(t)=0\end{pmatrix}$$

Exploiter les équations du mouvement

Réponse à la problématique : On a maintenant toutes les équations du mouvement. Comme toutes ces équations dépendent du temps, il faut répondre à la problématique en deux temps. ☺

• Quand l'avion a-t-il parcouru 195 m ? On résout $195=\frac{1}{2}\frac{10^5}{23{,}7\cdot10^3}\cdot t^2$

Soit t = 9,61 s.

• Quelle vitesse a-t-il atteint à t = 9,61 s ? $v=\frac{10^5}{23{,}7\cdot10^3}\cdot 9{,}6$

v = 40,6 m·s^{-1}, soit 146 km·h^{-1}

Donc, le *Rafale* ne peut pas décoller sur une distance de 195 m. L'usage de la catapulte est nécessaire.

Remarque : on aurait également pu demander aux équations « Quelle est la distance parcourue par l'avion lorsque celui-ci atteint une vitesse de 213 km·h^{-1} (soit 59,2 m·s^{-1}) ? ».
On aurait trouver que l'avion atteint cette vitesse à un temps t = 14,0 s et une distance parcourue x = 415 m, ce qui est supérieur à la taille de la piste.

Question bonus : La vitesse du vent de face doit être telle qu'elle compense la différence de vitesse entre celle de l'avion en bout de piste (146 km·h^{-1}) et celle nécessaire à son décollage (213 km·h^{-1}), soit 67 km·h^{-1}.

Ex.8

Préalable

On étudie le mouvement de la balle dans le référentiel terrestre. On choisit un repère dont l'axe vertical est orienté vers le haut, l'origine du repère étant au sol (mais on pourrait choisir un autre repère). La balle est soumise uniquement à son poids.

$$\vec{P}\begin{pmatrix}P_x=0\\P_y=0\\P_z=-m\cdot g\end{pmatrix}$$

Équations du mouvement

Application de la RFD : $\vec{P}=m\cdot\vec{a}$. Puisque $\vec{P}=m\cdot\vec{g}$, alors $\vec{a}=\vec{g}$

$$\vec{a}\begin{pmatrix}a_x=0\\a_y=0\\a_z=-g\end{pmatrix}$$

Coordonnées du vecteur vitesse : On intégre le vecteur accélération par rapport au temps. il apparaît des **constantes d'intégration**. Initialement, les coordonnées du vecteur vitesse sont : $v_{0x} = 0$; $v_{0y} = 0$; $v_{0z} = +3$; on obtient donc :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = -g\cdot t + 3 \end{pmatrix}$$

Coordonnées du vecteur position : On intégre le vecteur vitesse par rapport au temps. il apparaît des **constantes d'intégration**. Initialement, les coordonnées du vecteur position sont : $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = +2$; on obtient donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g\cdot t^2 + 3\cdot t + 2 \end{pmatrix}$$

Exploiter les équations du mouvement

• **Au bout de combien de temps la balle retombe-t-elle au sol** revient à déterminer pour quelle valeur de t on a $z = 0$. Il faut donc résoudre l'équation du second degré $-5\cdot t^2 + 3\cdot t + 2 = 0$.
Les solutions mathématiques sont 1,0 s et -0,40 s. Seule la solution positive a un sens physique. La balle retombe au sol au bout de 1,0 s.

• **Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle :** lorsque la balle atteint sa hauteur maximale, sa vitesse est nulle, donc on résout $0 = -10\cdot t + 3$, soit $t = 0{,}3$ s. Ensuite, on calcule $z(3) = -5\times0{,}3^2 + 3\times0{,}3 + 2 = 2{,}45$ m.

• **Vitesse de la balle au moment de l'impact :** on sait que la balle touche le sol à $t = 1{,}0$ s, on calculer $v_z(1) = -7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Le signe moins montre que la balle tombe vers les z négatifs. La réponse est donc 7 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (on demande la valeur de la vitesse, donc une grandeur positive).

• **Sur la lune :** mêmes raisonnements et mêmes calculs, seule la valeur de g change. On trouve : 4,3 s pour le temps au bout duquel la balle retombe au sol, 4,8 m pour la hauteur maximale atteinte et la vitesse d'impact vaut 3,9 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Ex.8

Pour qu'un objet accélère, freine ou tourne, il faut qu'une force s'exerce sur lui. Donc, d'après la 3ème loi de Newton, il faut qu'il exerce une force sur quelque chose. Or dans le vide, il ne peut exercer de force sur aucun support ; seulement sur de la matière qu'il éjecte. Voyager dans le vide nécessite donc d'éjecter de la matière contenue dans l'objet. Or, la masse d'un objet n'étant pas infinie, la manœuvrabilité d'un objet dans le vide est limitée par la quantité de matière qu'il peut embarquer. Une bonne partie de la masse d'une fusée ou d'une sonde est constituée de matière à éjecter pour permettre la navigation.

Ex.9

• **Application de la RFD pour obtenir l'accélération :** La balle est soumise seulement à son poids, donc les coordonnées du vecteur accélération sont : $a_x = 0$ et $a_y = -g$

• **Vecteur vitesse :** Par intégration des coordonnées du vecteur accélération, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse : $v_x = v_{0x}$ et $v_y = -g\cdot t + v_{0y}$; avec $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$

• **Vecteur position :** Par intégration des coordonnées du vecteur vitesse, on obtient les coordonnées du vecteur position : $x = v_0\cdot t + x_0$ et $y = -0{,}5\times g\cdot t^2 + y_0$; avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 4$.

• **Équation de la trajectoire :** on exprime y en fonction de x.

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + 2{,}3$$

• **Interrogation des équations :** on traduit en termes mathématiques le problème posé par l'énoncé. Lorsque $y = 0$, on veut que $x \leq 18{,}4$ (1)
Et lorsque $x = 12{,}0$, on veut que , on veut que $y \geq 0{,}92$ m (2).

Résolvons (1), en prenant $g = 10\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}$ pour simplifier les calculs.

$0 = -5\cdot\left(\frac{18{,}4}{v_0}\right)^2 + 2{,}3$ donne v_0 = 27,0 m/s soit 97 km/h. La vitesse initiale de la balle doit donc être inférieur ou égale à 97 km/h pour que celle-ci ne touche pas le sol au-delà de la ligne.

Résolvons (2) : $0{,}92 = -5\cdot\left(\frac{12}{v_0}\right)^2 + 2{,}3$ donne $v_0 = 22{,}7$ m/s soit 82 km/h.
Pour passer le filet, la balle doit avoir au moins cette vitesse.

Donc pour réussir son service en tirant la balle horizontalement, le joueur doit lui communiquer une vitesse comprise en 82 km/h et 97 km/h.

Ex.10

Ex.11

1.1. Représentation de $\vec{E}$: du + vers le – ; taille : 1,5 cm.

1.2. Les charges opposées s'attirent, les e^- sont donc chargés négativement.

1.3. $\vec{F} = -e\cdot\vec{E}$. Le sens de $\vec{F}$ est opposé à celui de $\vec{E}$, c'est-à-dire vers la plaque positive, ce qui est cohérent avec les observations de Thomson.

2.1. À partir de la RFD, on peut écrire $m\cdot\vec{a} = -e\cdot\vec{E}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{E}$ sont $\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{pmatrix}$

En projetant cette relation sur chacun des axe, on obtient :
Ox : $ma_x = 0$
Oy : $ma_y = -e\cdot E_y = e\cdot E$,
d'où on déduit : $a_x = 0$ et $a_y = \frac{e\cdot E}{m}$

2.2. On intègre les coordonnées du vecteur accélération pour trouver les coordonnées du vecteur vitesse :
$v_x = k_1$ et $v_y = (e\cdot E/m)\cdot t + k_2$.
Les coordonnées du vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ sont $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$

Donc $k_1 = v_0$ et $k_2 = 0$

On intègre encore une fois pour trouver les coordonnées du vecteur position :

$x = v_0\cdot t + k_3$ et $y = \frac{1}{2}\cdot\frac{e\cdot E}{m}\cdot t^2 + k_4$

La position initiale des électrons correspond à l'origine du repère, donc $k_3 = 0$ et $k_4 = 0$.
Pour trouver l'équation de la trajectoire des électrons, il suffit d'exprimer t en fonction de x et de remplacer t par cette expression dans l'équation donnant y =

$$t = \frac{x}{v_0} \text{ et donc } y = \frac{1}{2}\cdot\frac{e\cdot E}{m}\cdot\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

2.3.1. On peut écrire : $h = \frac{e\cdot E}{2\cdot m\cdot v_0^2}L^2$, et en isolant le rapport e/m, il vient : $\frac{e}{m} = \frac{2\cdot h\cdot v_0^2}{E\cdot L^2}$

2.3.2. AN (faire attention aux unités) :

$$\frac{e}{m} = \frac{2\times1{,}85\cdot10^{-2}\times(2{,}27\cdot10^7)^2}{15\cdot10^3\times(8{,}5\cdot10^{-2})^2} = 1{,}76\cdot10^{11}\ \mathrm{C\cdot kg^{-1}}$$

Ex.19

• Énergie cinétique de la balle : E_C (balle) $= 0{,}5\times5\cdot10^{-3}\times(10^3)^2 = 2{,}5$ kJ

• Vitesse de l'être humain : $v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2\times2{,}5\cdot10^3}{70}} = 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (environ 30 km/h)

Ex.20

Considérons un objet passant de l'altitude z_A à l'altitude z_B. Sa variation d'énergie potentielle ΔE_{PP} vaut : $\Delta E_{PP} = m\cdot g\cdot(z_B - z_A)$.
$(z_B - z_A)$ est la variation d'altitude, c'est-à-dire la hauteur que l'objet a prise ou perdue. Cette hauteur ne dépend pas de l'origine des altitudes (si l'objet est monté de 10 m, $\Delta E_{PP} = m\cdot g\times10$, qu'il soit passé de 0 à 10 m ou de 2500 m à 2510 m).

Ex.21

1.a. Décidons que le potentiel de la borne négative est de $V_N = 0$ V. Alors le potentiel de la borne positive vaut $V_P = +6$ V.
$\Delta E_{PE} = q\cdot(V_P - V_N) = -1{,}6\cdot10^{-19}\times(6 - 0) = -9{,}6\cdot10^{-19}$ J (soit -6 eV)

1.b. Cette énergie est cédée au circuit électrique qu'a traversé l'électron.

2. Décidons que l'origine des potentiels électriques correspondent à la position initiale du proton : $V_I = 0$. Lorsque le proton se sera déplacé de 0,5 m vers les potentiels négatifs, il sera alors à un potentiel $V_F = 0{,}5\times(-1000) = -500$ V.
$\Delta E_{PE} = q\cdot(V_F - V_I) = e\cdot(-500 - 0) = -8{,}0\times10^{-17}$ J (soit -500 eV).

Ex.22

1.a. Si on appelle A le point de départ de l'avion et B la fin de la piste, on a : $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = 100\cdot10^3\times195\times\cos(0) = 1{,}95\cdot10^7$ J. C'est un travail moteur.

1.b. Les autres forces qui s'exercent sur l'avion (poids et réaction de la piste), sont perpendiculaires au déplacement $\overrightarrow{AB}$. Leur travail est donc nul sur ce parcours.

2.a. Cette force permet à l'avion d'accélérer. Son travail se transforme donc en énergie cinétique.

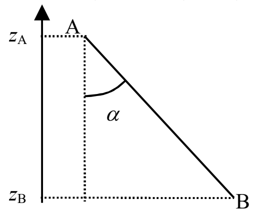
2.b. L'énergie cinétique de l'avion augmente, mais son énergie potentielle de pesanteur ne varie pas. Donc l'énergie mécanique de l'avion augmente.

3. Au bout de la piste, l'énergie cinétique de l'avion vaut $1{,}95\cdot10^7$ J.

Calcul de sa vitesse : $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\times1{,}95\cdot10^7}{23{,}7\cdot10^3}} = 40{,}6$ m·s^{-1} soit 146 km/h. Cette vitesse est inférieur à la vitesse de décollage de l'avion.

Ex.23

Imaginons un objet allant de A (altitude z_A) à B (altitude z_B)



Travail du poids : $W(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = P\cdot AB\cdot\cos\alpha$

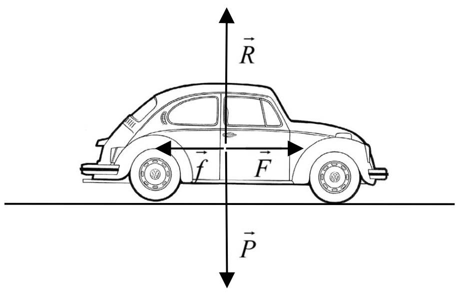
Or, $AB\cdot\cos\alpha = z_A - z_B$, donc $W(\vec{P}) = m\cdot g\cdot(z_A - z_B)$

D'autre part, $\Delta E_{PP} = m\cdot g\cdot(z_B - z_A)$, donc $W(\vec{P}) = -\Delta E_{PP}$. CQFD

Ex.24

Supposons que la voiture se déplace à vitesse constante sur une distance de 100 km, à l'horizontal.

• **Bilan des forces :** 4 forces s'exercent sur la voiture : son poids $\vec{P}$, la réaction de la route $\vec{R}$, la force motrice $\vec{F}$ et les forces de frottements que l'on réduit à une seule force $\vec{f}$.



• L'énergie mécanique de la voiture ne varie pas au cours du trajet.

• Travaux des forces :

$W(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R}$ est perpendiculaire à la route (toujours le cas !)

$W(\vec{P}) = 0$ car l'altitude de la voiture ne varie pas. De plus, $\vec{P}$ est une force conservative donc son travail ne modifie pas l'E_M de la voiture.

Deux forces ont donc une influence sur E_M : $\vec{F}$ et $\vec{f}$

Si E_M ne varie pas, $W(\vec{f}) = -W(\vec{F})$

Le travail de $\vec{F}$ est la partie de l'énergie chimique contenue dans l'essence convertie en énergie mécanique, soit : $W(\vec{F}) = 0{,}2\times8\times35 = 56$ MJ.

Donc $W(\vec{f}) = -56$ MJ

D'après la définition du travail, on peut écrire : $-f\times100\cdot10^3 = -56\cdot10^6$

Soit $f = 560$ N.

Ex.25

1. $W_{AB}(\vec{P}) = P\cdot AB\cdot\cos(\vec{P};\overrightarrow{AB}) = m\cdot g\cdot AB\cdot\cos\theta$

2. $\cos\theta$ = adjacent / hypothénuse = $(z_A - z_B)$ / AB, donc :
$AB\cdot\cos\theta = z_A - z_B$ et donc :
$W_{AB}(\vec{P}) = m\cdot g\cdot(z_A - z_B)$

3. $z_A - z_B = 100\times\cos(10°) = 98{,}5$ m, d'où $W_{AB}(\vec{P}) = 77$ kJ

4. $E_M(A) = 0{,}5\cdot m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot z_A = 90 + 7{,}7\cdot10^4 = 77$ kJ (énergie cinétique négligeable selon les règles des chiffres significatifs du chapitre 00).
$E_M(B) = 0{,}5\cdot m\cdot v^2 = 90$ J
Donc $\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = -77$ kJ.

5. L'énergie mécanique n'est pas constante car le parachutiste n'est pas uniquement soumis à des forces conservatives (le poids) : il est également soumis aux forces de frottements qui ralentissent sa chute.
$W_{AB}(\vec{f}) = -77$ kJ

Ex.26

Dans cette situation, la seule force exercée est le poids. Or, le poids est une force conservative, donc tout au long de son mouvement (tant qu'elle n'est soumise qu'à son seul poids), l'énergie mécanique de la balle est constante.

	E_C	E_P	E_M
Au moment du lancé	$0{,}5\times m\times3^2$	$m\times9{,}8\times2$	*constante*
Sommet trajectoire	0	$m\times9{,}8\times z_{max}$	
Juste avant contact sol	$0{,}5\times m\times v_F^2$	0	

• E_M au moment du lancé = E_M au sommet de la trajectoire, donc :
$$0{,}5\times m\times3^2 + m\times9{,}8\times2 = m\times9{,}8\times z_{max}$$
D'où $z_{max} = 2{,}46$ m

• E_M au moment du lancé = E_M juste avant contact avec le sol, donc :
$$0{,}5\times m\times3^2 + m\times9{,}8\times2 = 0{,}5\times m\times v_F^2$$
D'où $v_F = 6{,}9$ m/s