

ANNALES PERSO P2

La Grosse Bertha

La Grosse Bertha (en allemand : Dicke Bertha) est une très grosse pièce d'artillerie de siège utilisée par l'armée allemande lors de la Première Guerre mondiale. Le canon pouvait être monté sur un wagon.



Données

- Masse du canon : 43 tonnes
- Masse d'un obus : 650 kg
- Vitesse de l'obus à la sortie du canon : 330 m/s

Questions

Si le canon tire à l'horizontal (comme montré sur la photo)

1. En supposant que le wagon puisse reculer avec des frottements négligeables lors du tir, déterminer sa vitesse juste après le tir. On pourra négliger la masse des 100 kg d'explosifs qui réagissent au moment du tir devant la masse du canon.
2. À quelle distance du canon l'obus touchera-t-il le sol ? Vous vous servirez de la photo pour estimer une donnée manquante.
3. Le canon est maintenant incliné de 15° vers le haut. On néglige la variation de hauteur de la bouche du canon que cela entraîne. Quelle sera la portée de l'obus ?

Correction

1. Vitesse de recul

On peut considérer le système {canon + obus} comme isolé (frottements négligeables) et fermé (variation de masse négligeable). Donc la quantité de mouvement se conserve. Initialement, le système est immobile, donc : avant et donc après le tir, $\vec{p} = \vec{0}$

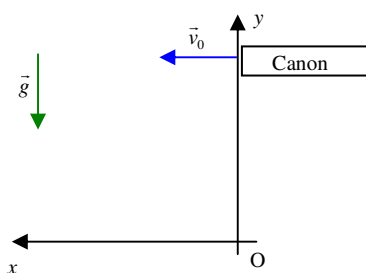
Donc après le tir $\vec{p}_{obus} = -\vec{p}_{canon}$ soit $\vec{v}_{canon} = -\frac{m_{obus}}{m_{canon}} \cdot \vec{v}_{obus}$

et donc $v_{canon} = \frac{0,65}{43} \cdot 330 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. Point d'impact de l'obus, tir horizontal

• Préalables

Système étudié : obus (réduit à un simple point)
 Référentiel : terrestre (que l'on considère galiléen)
 Repère : On choisit un repère de manière à ce que la sortie du canon corresponde à $x = 0$, l'axe y est orienté vers le haut, son origine étant prise par rapport au sol et l'axe x est orienté dans le sens du tir.



Bilan des forces : l'obus n'est soumis qu'à son poids. Même si cela n'est pas dit dans l'énoncé, on néglige les frottements, autrement on ne peut pas faire de calculs.

• Application de la RFD

La RFD $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$ devient ici : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$. Or, par définition, $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$

Vecteur accélération $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix}$

Par intégration, on obtient $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = k_1 \\ v_y = -g \cdot t + k_2 \end{pmatrix}$ k_1 et k_2 étant les

coordonnées du vecteur $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 = 330 \\ v_{0y} = 0 \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = -g \cdot t \end{pmatrix}$

Par intégration, on obtient $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cdot t + k_3 \\ y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + k_4 \end{pmatrix}$ k_3 et k_4 étant les

coordonnées du vecteur position initiale $\vec{OM}_0 = \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{pmatrix}$

Vecteur position $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cdot t \\ y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h \end{pmatrix}$

• Interrogation des équations

On traduit en termes mathématiques le problème posé par l'énoncé. Lorsque $y = 0$, que vaut x ?

Pour répondre, il faut passer par une étape intermédiaire qui est de calculer pour quel t a-t-on $y = 0$

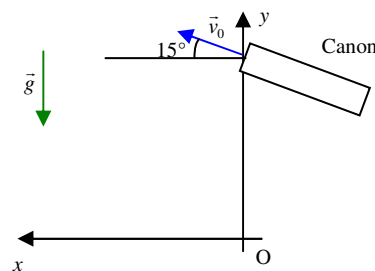
On résoud donc : $0 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + h$. En prenant $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $h = 4 \text{ m}$,

on obtient : $t = 0,90 \text{ s}$ (2 chiffres significatifs nécessaires !). Autrement dit, l'obus touche le sol au bout de 0,90 s.

Pour $t = 0,90 \text{ s}$, on trouve $x = 298 \text{ m}$. Donc l'obus touche le sol à 298 m du canon.

3. Tir avec un angle de 15°

La seule chose qui change, ce sont les coordonnées du vecteur \vec{v}_0



$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cdot \cos(15^\circ) \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin(15^\circ) \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v_0 \cdot \cos(15^\circ) \\ v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(15^\circ) \end{pmatrix}$

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cdot \cos(15^\circ) \cdot t \\ y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(15^\circ) \cdot t + h \end{pmatrix}$

• Interrogation des équations

On résoud : $0 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(15^\circ) \cdot t + h$. En prenant $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et

$h = 4 \text{ m}$, et $v_0 = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient : $t = 17,5 \text{ s}$.

Pour $t = 17,5 \text{ s}$, on trouve $x = 5,6 \text{ km}$. Donc l'obus touche le sol à 5,6 km du canon.